ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN-TIN HỌC
------------oOo------------

Tiểu luận tốt nghiệp

Chuyên ngành Giải Tích

Khóa 2003-2007

Đề tài:

XÁC ĐỊNH LỰC THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ ĐÀN HỒI ĐẲNG HƯỚNG HAI CHIỀU

THẦY HƯỚNG DẪN: PGS. ĐẶNG ĐỨC TRỌNG

THẦY PHẢN BIỆN: PGS. ĐINH NGỌC THANH

SINH VIÊN THỰC HIỆN: PHAN THÀNH NAM –0311017

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

THÁNG 5–2007

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin cảm ơn thầy Dương Minh Đức và thầy Đặng Đức Trọng, những người thầy đã tận tâm giảng dạy, hướng dẫn và khích lệ tôi trong suốt quá trình học tập. Hơn nữa, đây là những người thầy đã có nhiều ảnh hưởng với tôi trong cách suy nghĩ về Toán. Tôi xin cảm ơn thầy Phạm Ngọc Định Alain và anh Trương Trung Tuyến đã rất nhiệt tình chỉ dạy, giúp đỡ tôi trong quá trình nghiên cứu. Tôi xin cảm ơn thầy Đinh Ngọc Thanh đã đọc phản biện cho tiểu luận này.

Tôi xin cảm ơn các bạn tốt của tôi, trong đó có các bạn Quách Đình Hoàng, Trần Minh Bình, Lê Phương, Nguyễn Thành Nhân, Mạch Nguyệt Minh, đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong học tập và trong cuộc sống.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn ba, mẹ và em trai yêu quý của tôi.

Tp.HCM, ngày 19 tháng 5 năm 2007

Phan Thành Nam

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU BÀI TOÁN

Cho $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ biểu diễn một vật thể đàn hồi đẳng hướng 2 chiều. Với mỗi điểm $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, ta kí hiệu $u = (u_1(x,t),\, u_2(x,t))$ là độ chuyển dịch (displacement), trong đó u_j là độ chuyển dịch tính theo phương x_j. Như chúng ta đã biết (có thể xem trong [1, 2]), u thỏa mãn hệ phương trình Lamé

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu)\, \nabla\, (div(u)) + F$$

với $F := (F_1, F_2)$ là lực thể tích, $div(u) = \nabla \cdot u = \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2$, và λ, μ là các hằng số Lamé. Chúng ta sẽ giả sử là biên của vật thể đàn hồi bị kẹp chặt, nghĩa là

$$(u_1(x,t), u_2(x,t)) = (0,0), \qquad x \in \partial\Omega,$$

và các điều kiện đầu của u được cho trước .

Chúng ta sẽ xem xét bài toán xác định lực thể tích F. Đây là một dạng bài toán ngược. Một bài toán ngược thường được nghiên cứu ở nhiều khía cạnh như tính duy nhất, tính ổn định và vấn đề chỉnh hóa. Có khá nhiều bài báo về tính duy nhất, tính ổn định, song lại khá ít bài về vấn đề chỉnh hóa, đặc biệt là rất hiếm bài đưa ra đánh giá sai số cụ thể.

Vì vấn đề xác định lực F là rất phức tạp nên cần phải có thêm một số giả thiết. Trong [11] (trang 166), Isakov đã xem xét bài toán tìm một cặp hàm (u, f) thỏa mãn phương trình sóng

$$cu_{tt} - \Delta u = f$$

với f là độc lập với t. Tác giả này đã chỉ ra là, với một số thông tin tiên nghiệm về f, từ điều kiện cuối

$$u(x,T) = h(x)$$

chúng ta sẽ có tính duy nhất của (u, f).

Một bài toán ngược khác là tìm nguồn nhiệt $F(x,t,u)$ thỏa mãn

$$u_t - \Delta u = F.$$

Bài toán này đã được nghiên cứu trong một thời gian dài, đặc biệt là trong 30 năm trở lại đây. Năm 1935, trong [12], Tikhonov đã chứng minh tính duy nhất dựa trên dữ liệu cuối và dữ liệu cho trên biên. Gần đây, trong [13, 14], các tác giả đã xem xét bài toán khi nguồn nhiệt F có dạng tách biến

$$F(x,t,u) = \varphi(t) f(x)$$

với φ là hàm chưa biết. Một dạng tương tự của nguồn nhiệt F cũng được nghiên cứu trong [15, 16] nhưng với f là hàm chưa biết. Trong đó, từ điều kiện đầu, điều kiện cuối và điều kiện biên, các tác giả đã xem xét bài toán chỉnh hóa f. Ý tưởng dùng biến đổi Fourier và cắt cụt tích phân trong đó cũng sẽ được dùng trong tiểu luận này.

Rất gần với đề tài của chúng ta, bài toán ngược về tìm lực thể tích của hệ đàn hồi cũng đã được nghiên cứu trong [18]. Trong đó, các tác giả đã chứng minh rằng, nếu T đủ lớn, φ đủ trơn và và $\varphi(0) \neq 0$ thì lực thể tích (có dạng tách biến $\varphi(t)f(x)$ với f chưa biết) là xác định duy nhất từ điều kiện đầu, điều kiện biên bị kẹp, và sức ép bề mặt cho trên một phần của biên Ω. Cũng trong bài báo đó, các tác giả đã chỉ ra một công thức trừu tượng để xác định f, tuy nhiên không đề cập tới vấn đề chỉnh hóa trong trường hợp dữ liệu không chính xác.

Trong tiểu luận này, để giải quyết vấn đề chỉnh hóa bài toán, ngoài điều kiện đầu và điều kiện biên bị kẹp, chúng ta sẽ cần thêm điều kiện cuối và sức ép bề mặt trên cả biên Ω. Để mô tả sức ép bề mặt, ta cần đưa ra một số đại lượng cơ học. Gọi σ_1, σ_2, τ là các sức ép (xem [1, 2]) xác định bởi

$$\begin{aligned}
&\tau = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\
&\sigma_j = \lambda div(u) + 2\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \qquad \forall j \in \{1, 2\}.
\end{aligned}$$

Chúng ta sẽ giả sử sức ép bề mặt được cho trên biên của vật thể, nghĩa là

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau \\ \tau & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

với $X = (X_1, X_2)$ được cho trên $\partial\Omega$, ở đây $n = (n_1, n_2)$ là vector pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài. Hơn nữa, để đơn giản, như trong [18] chúng ta cũng sẽ xét khi F có dạng tách biến

$$(F_1(x, t), F_2(x, t)) = \varphi(t)(f_1(x), f_2(x))$$

với φ được cho trước không chính xác. Mặt dù vậy, do φ là không chính xác nên bài toán của chúng ta vẫn không chỉnh, và thậm chí nó là phi tuyến.

Bằng cách sử dụng biến đổi Fourier, chúng ta sẽ đưa bài toán về tìm nghiệm một nhị thức với hệ số bậc nhất là một hàm nguyên. Khi đó, bài toán là không ổn định trên lân cận các không điểm của hàm nguyên này. Sử dụng tư tưởng chỉnh hóa của Tikhonov và cắt cụt tích phân, chúng ta sẽ khử các điểm kì dị để chỉnh hóa bài toán. Khi có thêm thông tin tiên nghiệm về lời giải chính xác, chúng ta đưa ra một xấp xỉ sai số cụ thể.

Phần còn lại của tiểu luận được chia thành ba chương. Chương 1 là phần kiến thức chuẩn bị, bao gồm việc nhắc lại một số kiến thức cơ bản và nêu một vài kết quả cần thiết cho phần sau. Chương 2 được dành để phát biểu và chứng minh các kết quả chính, đây là các kết quả được trích từ [19]. Chương 3 trình bày một ví dụ cụ thể minh họa cho các tính toán lý thuyết.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Các không gian hàm

Trước hết, xin nhắc lại các không gian L^p và $W^{1,p}$. Chi tiết có thể xem trong [5, 6].

Cho Ω là một tập đo được trong R^N.

Định nghĩa 1.1. Với mỗi ánh xạ đo được $f : \Omega \to C$ và $1 \le p \le \infty$, ta kí hiệu

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{với } 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{\eta > 0 : |f(x)| \le \eta \text{ với a.e } x \in \Omega\}.$$

Với mỗi $1 \le p \le \infty$, ta gọi $L^p(\Omega)$ là không gian gồm tất cả các hàm f đo được trên Ω sao cho $\|f\|_p < \infty$.

Định lý 1.1. *Với mỗi $1 \le p \le \infty$, $L^p(\Omega)$ là một không gian Banach với chuẩn $\|.\|_{L^p(\Omega)} = \|.\|_p$. Đặc biệt, $L^2(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng $< f, g >= \int\limits_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$.*

Chứng minh định lý này dựa trên bất đẳng thức quan trọng sau.

Định lý 1.2. (Bất đẳng thức Holder) *Cho $p, q \in (1, \infty)$ và $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Nếu $f \in L^p(\Omega)$, $q \in L^q(\Omega)$ thì $f.g \in L^1(\Omega)$ và*

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Bây giờ cho Ω là một tập mở trong R^N. Ta kí hiệu $C_c^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trên Ω. Với mỗi $c \in C_c^\infty(\Omega)$ và $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in Z^N$ với $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, 2, ..., N$, ta kí hiệu $|\alpha| = \Sigma_{i=1}^N \alpha_i$ và

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_N} x_N}(x), \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega.$$

Định nghĩa 1.2. Với mỗi $1 \le p \le \infty$ và m nguyên dương, *không gian Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ là tập hợp tất cả các hàm $f \in L^p(\Omega)$ sao cho với mỗi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in Z^N$ với $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, 2, ..., N$ và $|\alpha| \le m$, tồn tại $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ thỏa mãn

$$\int\limits_\Omega f(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega g_\alpha(x) \phi(x) dx, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Khi đó ta kí hiệu $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_N} x_N} = g_\alpha$. Đặc biệt, ta đặt $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Định lý 1.3. *Với mỗi* $1 \le p < \infty$*, m nguyên dương,* $W^{m,p}(\Omega)$ *là không gian Banach với chuẩn*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Tiếp theo, xin giới thiệu các không gian $C^m(I, X)$ và $L^p(I, X)$, trong đó I là một khoảng (mở hoặc đóng) trong R và X là không gian Banach. Về các chi tiết có thể xem trong [8].

Một cách đơn giản, ta định nghĩa $C(I, X)$ là tập hợp các ánh xạ liên tục từ I vào X. Tuy nhiên, để định nghĩa $C^m(I, X)$, ta cần đến phép tính vi phân trong không gian định chuẩn. Định nghĩa sau là một trường hợp riêng của các định nghĩa trong [7].

Định nghĩa 1.3. Cho I là một khoảng (mở hoặc đóng) trong R và $u : I \to X$.

• Nếu I là một khoảng mở, ta nói u *khả vi* trên I nếu tồn tại ánh xạ đạo hàm $\dfrac{\partial u}{\partial t} : I \to X$ sao cho

$$\lim_{s \to t} \frac{u(t) - u(s)}{t - s} = \frac{\partial u}{\partial t}(s), \qquad \forall s \in I,$$

với giới hạn tính theo chuẩn của X.

Với mỗi số nguyên dương m, ta nói u khả vi m lần trên I nếu các ánh xạ đạo hàm sau đây đều tồn tại

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} := \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), ..., \frac{\partial^m u}{\partial t^m} := \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^m}\right).$$

• Nếu I là một khoảng đóng và m nguyên dương, ta nói u khả vi m lần trên I nếu tồn tại một khoảng mở I' chứa I và một ánh xạ $v : I' \to X$ khả vi m lần trên I' sao cho $v|_I = u$. Ta cũng kí hiệu $\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k} = \left.\dfrac{\partial^k v}{\partial t^k}\right|_I$ với mọi $k = 1, 2, ..., m$.

Định nghĩa 1.4. Cho I là một khoảng (mở hoặc đóng) và m là một số nguyên dương, ta kí hiệu $C^m(I, X)$ là tập hợp các hàm $u : I \to X$ khả vi m lần trên I sao cho $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} \in C(I, X)$.

Về không gian $L^p(I, X)$, ta cũng định nghĩa tương tự với không gian $L^p(\Omega)$. Ta kí hiệu $C_c(I, X)$ là tập hợp các hàm liên tục có giá compact trên I.

Định nghĩa 1.5. Cho I là một khoảng mở trong R và $u : I \to X$. Ta nói u là đo được nếu có một dãy hàm u_n trong $C_c(I, X)$ sao cho $u_n(t) \to u(t)$ với a.e $t \in I$.

Định nghĩa 1.6. Cho I là một khoảng mở trong R và $1 \le p \le \infty$. Ta kí hiệu $L^p(I, X)$ là tập hợp (các lớp tương đương) các hàm đo được $u : I \to X$ sao cho hàm thực $t \mapsto \|u(t)\|_X$ thuộc $L^p(I)$, trong đó ta đồng nhất u với v nếu $u(t) = v(t)$ với a.e $t \in I$.

Ta thấy rằng nếu I bị chặn và $1 \le q \le p \le \infty$ thì $L^p(I, X) \subset L^q(I, X)$.

Định lý 1.4. *Cho I là một khoảng mở trong R,* $1 \le p < \infty$ *và X là một không gian Banach. Thì* $L^p(I, X)$ *là không gian Banach với chuẩn* $\|u\|_{L^p(I,X)} = \|\||u(.)\||_X\|_{L^p(I)}$.

1.2. Hàm giải tích

Trước hết, xin nhắc lại những định nghĩa cơ bản trong giải tích phức. Về chi tiết có thể xem trong [4].

Cho Ω là một tập mở trong không gian phức C và một ánh xạ $f : \Omega \to C$.

Định nghĩa 1.7.
• Ta nói f *giải tích* (analytic) tại $z_0 \in \Omega$ nếu giới hạn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

tồn tại. Khi đó ta kí hiệu giới hạn này là $f'(z_0)$ và gọi nó là đạo hàm của f tại z_0.
• Ta nói f giải tích trên Ω nếu f giải tích tại mọi điểm trong Ω.
• Ta nói f là hàm nguyên (entire function) nếu f giải tích trên cả mặt phẳng C.

Một định nghĩa khác của hàm giải tích được cho bởi kết quả sau.

Định lý 1.5.
• *Hàm f là giải tích tại $z_0 \in \Omega$ khi và chỉ khi tồn tại một đĩa mở $B(z_0, r) \subset \Omega$ và một chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hội tu về $f(z)$ với mọi $z \in B(z_0, r)$.*
• *Hàm f là giải tích trên đĩa $B(z_0, r) \subset \Omega$ khi và chỉ khi tồn tại một chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hội tụ về $f(z)$ với mọi $z \in B(z_0, r)$.*

Từ kết quả trên ta nghiệm được tính chất sau.

Định lý 1.6. *Cho hàm f là giải tích trên đĩa đóng $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$. Nếu phương trình $f(z) = 0$ có vô hạn nghiệm trên $B(z_0, r)$ thì $f(z) = 0$ với mọi $z \in B(z_0, r)$.*

Nói cách khác, nếu một hàm giải tích không đồng nhất bằng 0 trên một đĩa thì nó chỉ có thể có hữu hạn không điểm trên đĩa đó. Do đó, nếu một hàm nguyên không đồng nhất bằng 0 thì số không điểm của nó chỉ có thể là hữu hạn hoặc đếm được. Tuy nhiên, trong tiểu luận này chúng ta còn muốn ước lượng độ đo tập hợp các điểm z trên một đĩa sao cho $|f(z)|$ nhỏ. Chúng ta sẽ dùng kết quả sau đây (xem [3], mục 11.3, Theorem 4).

Định lý 1.7. *Cho $f(z)$ là một hàm giải tích trên đĩa $\{z : |z| \leq 2eR\}$, $|f(0)| = 1$, và η là một số dương nhỏ tùy ý. Thì ta có đánh giá*

$$\ln |f(z)| > -\ln(\frac{15e^3}{\eta}). \ln(M_f(2eR))$$

với mọi z trong đĩa $\{z : |z| \leq R\}$ ngoại trừ 1 tập hợp các đĩa (C_j) có tổng các bán kính $\sum r_j \leq \eta R$. Ở đây ta kí hiệu $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Kết quả này có thể giải thích một cách hình ảnh là nếu modul của một hàm giải tích không tăng quá nhanh (tức là $M_f(2eR)$ không quá lớn) thì nó cũng không giảm quá nhanh về 0 (tức là $|f(z)|$ không quá nhỏ).

1.3. Biến đổi Fourier

Để ngắn gọn, ta trình bày biến đổi Fourier dưới dạng một định lý. Chi tiết hơn có thể tham khảo trong nhiều tài liệu, chẳng hạn [9].

Ở đây ta xét không gian R^N với N nguyên dương tùy ý.

Định lý 1.8. *Có một biến đổi tuyến tính liên tục $F : L^2(R^N) \to L^2(R^N)$ thỏa mãn các điều sau*
(i) Nếu $f \in L^1(R^N) \cap L^2(R^N)$ thì

$$F(f)(\xi) = \int_{R^N} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

(ii) $\|F(f)\|_{L^2(\Omega)} = (2\pi)^{N/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}$.
(iii) $F^{-1}(f)(\xi) = (2\pi)^{-N} F(f)(-\xi)$.

Ánh xạ F trong định lý trên được gọi là biến đổi Fourier trong R^N. Đẳng thức (ii) được gọi là đẳng thức Plancherel—Parseval.

Chú ý là cho dù một hàm chỉ nhận giá trị thực thì biến đổi Fourier của nó cũng có thể nhận giá trị phức. Trong trường hợp $R^N = R$ và f có giá compact, thì $F(f)$ có thể mở rộng thành một hàm nguyên trên C.

Định lý 1.9. *Cho $f \in L^1(R)$, f có giá compact. Thì $\widehat{f} : C \to C$ xác định bởi*

$$\widehat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt$$

là một hàm nguyên.

Chứng minh. Giả sử giá của f chứa trong $[a, b]$. Với mọi $z \in C$ ta có

$$\lim_{z_n \to z} \frac{\widehat{f}(z_n) - \widehat{f}(z)}{z_n - z} = \lim_{z_n \to z} \int_a^b f(t)\frac{e^{-itz_n} - e^{-itz}}{z_n - z}dt = -i\int_a^b f(t)te^{-itz}dt$$

theo định lý Hội tụ bị chặn Lebesgue. Điều này chứng tỏ $\widehat{f}$ là một hàm nguyên.

Ta thấy biến đổi Fourier được định nghĩa cho các hàm thuộc $L^2(R^N)$, tuy nhiên bằng cách thác triển ta cũng có thể dùng biến đổi Fourier cho các hàm xác định trên tập bị chặn. Kết quả sau đây chỉ ra một "phiên bản" của biến đổi Fourier mà ta sẽ dùng trong tiểu luận.

Định lý 1.10. *Cho $a \in R$, Q là một tập con đo được trong R^N ($N \geq 1$), và w là hàm thực trong $L^1(Q) \cap L^2(Q)$. Thì*

$$\int_{R^N} \left| \int_Q w(x)\sin(a + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k)dx \right|^2 d\alpha = 2^{N-1}\pi^N \|w\|^2_{L^2(Q)}.$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh cho trường hợp $a = 0$. Đặt $\widetilde{w} : R^N \to R$

$$\widetilde{w}(x) = \begin{cases} w(x) - w(-x) & \text{nếu } x, -x \in Q, \\ w(x) & \text{nếu } x \in Q, -x \notin Q, \\ -w(-x) & \text{nếu } x \notin Q, -x \notin Q, \\ 0 & \text{nếu } x, -x \notin Q. \end{cases}$$

Thì $\widetilde{w} \in L^1(R^N) \cap L^2(R^N)$ và

$$F(\widetilde{w})(\alpha) = 2i \int\limits_Q w(x) \sin(\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx$$

trong đó F là biến đổi Fourier trong R^N. Sử dụng đẳng thức Parseval, ta có

$$\int\limits_{R^N} \left| \int\limits_Q w(x) \sin(\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx \right|^2 d\alpha = \frac{1}{4} \|F(\widetilde{w})\|^2_{L^2(R^n)} = \frac{(2\pi)^N}{4} \|\widetilde{w}\|^2_{L^2(R^N)} = 2^{N-1}\pi^N \|w\|^2_{L^2(Q)}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\int\limits_{R^N} \left| \int\limits_Q w(x) \cos(\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx \right|^2 d\alpha = 2^{N-1}\pi^N \|w\|^2_{L^2(Q)}.$$

Bây giờ chú ý rằng

$$\left| \int\limits_Q w(x) \sin(a + \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx \right|^2$$

$$= (\cos(a))^2 \left| \int\limits_Q w(x) \sin(\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx \right|^2 + (\sin(a))^2 \left| \int\limits_Q w(x) \cos(\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx \right|^2 + v(\alpha)$$

trong đó

$$v(\alpha) = \sin(2a). \int\limits_\Omega w(x) \sin(\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx. \int\limits_\Omega w(x) \cos(\sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx.$$

Do $v(-\alpha) = -v(\alpha)$ với mọi $\alpha \in R^n$, ta có $\int\limits_{R^n} v(\alpha) d\alpha = 0$. Vậy

$$\int\limits_{R^N} \left| \int\limits_Q w(x) \sin(a + \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k) dx \right|^2 d\alpha$$

$$= (\cos(a))^2 . 2^{N-1}\pi^n \|w\|^2_{L^2(Q)} + (\sin(a))^2 . 2^{N-1}\pi^n \|w\|^2_{L^2(Q)} = 2^{N-1}\pi^N \|w\|^2_{L^2(Q)}.$$

1.4. Bài toán không chỉnh và vấn đề chỉnh hóa

Những bài toán phương trình đạo hàm riêng (đặc biệt là những bài toán có nguồn gốc từ vật lý) thường có dạng tìm nghiệm từ dữ liệu cho trước. Xuất phát từ ý nghĩa thực tế của bài toán, theo Hadamard (xem [10], mục 1.2), một bài toán được gọi là chỉnh (well−posed) nếu có ba tính chất

- Tính tồn tại (existence): bài toán có nghiệm.
- Tính duy nhất (unique): bài toán có nhiều nhất một nghiệm.
- Tính ổn định (stability): nghiệm phụ thuộc liên tục vào dữ liệu.

Một bài toán được gọi là không chỉnh (ill−posed) nếu thiếu một trong ba tính chất trên. Về mặt toán học, việc tồn tại nghiệm có thể đạt được bằng cách mở rộng không gian nghiệm. Chẳng hạn, ý tưởng tìm nghiệm theo nghĩa phân bố (distribution) của phương trình đạo hàm riêng là một ví dụ. Nếu bài toán có nhiều hơn một nghiệm thì thường là thông tin về nghiệm bị thiếu, và bằng những thông tin bổ sung ta sẽ thu được nghiệm duy nhất. Yêu cầu quan trọng nhất là sự ổn định của nghiệm, bởi nếu thiếu điều này này thì một sai số dù nhỏ của dữ liệu cũng có thể dẫn tới một sai số lớn của nghiệm. Điều này làm cho chúng ta không thể nào tính được nghiệm (dù là xấp xỉ), bởi mọi dữ liệu có được do đo đạc đều phải đi kèm với sai số.

Để khắc phục tính không chỉnh của bài toán, ta phải thực hiện công việc chỉnh hóa (regularization). Để dễ hình dung, ta hãy giả sử bài toán đặt ra như sau: nếu có dữ liệu chính xác I_{ex} thì ta sẽ có duy nhất một nghiệm chính xác là u_{ex}, tuy nhiên ta chỉ có dữ liệu xấp xỉ I_ε và nhiệm vụ của chúng ta là từ dữ liệu xấp xỉ I_ε phải xây dựng u_ε xấp xỉ với nghiệm chính xác u_{ex}. Tất nhiên, cách đặt u_ε là tùy ý và không nhất thiết thỏa mãn bài toán ban đầu ứng với dữ liệu I_ε.

Một cách chính xác, ta có các định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.8. Cho hai không gian định chuẩn X, Y và một ánh xạ $K : X \to Y$ (tuyến tính hoặc phi tuyến). Phương trình $Kx = y$ được gọi là chỉnh nếu ba tính chất sau được thỏa
1. Tồn tại: với mỗi $y \in Y$ đều có ít nhất một $x \in X$ thỏa mãn $Kx = y$.
2. Duy nhất: với mỗi $y \in Y$ đều có nhiều nhất một $x \in X$ thỏa mãn $Kx = y$.
3. Ổn định: nếu $Kx_n \to Kx$ thì $x_n \to x$.
Phương trình được gọi là không chỉnh nếu thiếu ít nhất một trong ba tính chất trên.

Định nghĩa 1.9. Cho hai không gian định chuẩn X, Y và một ánh xạ $K : X \to Y$ (tuyến tính hoặc phi tuyến).
• Một lời giải chỉnh hóa của phương trình $Kx = y$ là một họ các ánh xạ $R_\delta : Y \to X, \delta > 0$, sao cho $\lim\limits_{\delta\to 0} R_\delta K x \to x, \forall x \in X$.
• Một tham số chỉnh hóa $\delta = \delta(\varepsilon)$ gọi là chấp nhận được nếu với mọi y, y_ε thỏa mãn $||y_\varepsilon - Kx||_Y \le \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, thì $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R_{\delta(\varepsilon)} y_\varepsilon = x$.

Từ định nghĩa, ta thấy rằng để có thể xây dựng một lời giải chỉnh hóa cho phương trình $Kx = y$ thì trước hết K phải là đơn ánh. Do đó, một nguyên tắc chung là phải chứng minh tính duy nhất trước khi xây dựng lời giải chỉnh hóa.

Chương 2

CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

2.1. Phát biểu bài toán

Cho $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ và $T > 0$. Chúng ta xem xét bài toán tìm một cặp (u, f) thỏa mãn hệ phương trình

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} div(u) + \varphi(t) f_j(x), \forall j \in \{1, 2\} \tag{1}$$

với $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, ở đây μ, λ là các hằng số thực thỏa mãn $\mu > 0$ và $\lambda + 2\mu > 0$.

Vì biên của vật thể đàn hồi bị giữ cố định nên hàm $u = (u_1, u_2)$ thỏa mãn điều kiện biên

$$(u_1(x,t), u_2(x,t)) = (0,0), \qquad x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Hơn nữa, các điều kiện đầu và cuối đặt lên u được cho trên Ω

$$\begin{cases} (u_1(x,0), u_2(x,0)) = (u_{01}(x), u_{02}(x)), \\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}(x,0), \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(x,0)\right) = (u_{01}^*(x), u_{02}^*(x)), \\ (u_1(x,T), u_2(x,T)) = (u_{T1}(x), u_{T2}(x)). \end{cases} \tag{3}$$

Cuối cùng, sức căng bề mặt được cho trên $\partial\Omega$

$$\begin{cases} n_1\sigma_1 + n_2\tau = X_1, \\ n_2\sigma_2 + n_1\tau = X_2. \end{cases} \tag{4}$$

Chúng ta sẽ giả sử dữ liệu của hệ $(1) - (4)$ là

$$I = (\varphi, X, u_0, u_0^*, u_T) \in \left(L^1(0,T), (L^1(0,T,L^1(\partial\Omega)))^2, (L^1(\Omega))^2, (L^1(\Omega))^2, (L^1(\Omega))^2\right)$$

được cho không chính xác bởi chúng là dữ liệu đo được. Khi đó, hệ $(1) - (4)$ thường là vô nghiệm, hơn nữa nếu nghiệm tồn tại thì nó cũng không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu. Do đó, công việc chỉnh hóa là cần thiết. Gọi I_{ex} là dữ liệu chính xác ứng với nghiệm chính xác (nói chung là không biết) của hệ $(1) - (4)$, thì từ dữ liệu I_ε được cho xấp xỉ I_{ex}, chúng ta sẽ xây dựng một nghiệm chỉnh hóa f_ε (không nhất thiết thỏa mãn hệ $(1) - (4)$) xấp xỉ f_{ex} .

2.2. Các kết quả chính

Để cho gọn, với mỗi $\xi = (\xi_1, \xi_2), \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R^2$, ta đặt $\xi \cdot \zeta = \xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2$ và $|\xi| = \sqrt{\xi \cdot \xi}$.

Trước hết chúng ta có Bổ đề sau.

Bổ đề 2.1. *Giả sử $u \in (C^2([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)))^2$, $f \in (L^2(\Omega))^2$ thỏa mãn hệ $(1)-(4)$ ứng với dữ liệu I. Thì với mọi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2 \backslash \{0\}$, ta có*

$$2D(I). \int\limits_{\Omega} f_j(x). \cos(\alpha \cdot x) dx = g_j(I),$$

với mỗi $j \in \{1, 2\}$, trong đó

$$\begin{aligned} D(I) &= D_1(I).D_2(I), \\ g_j(I) &= \frac{2}{|\alpha|^2}(\alpha_j D_2(I) h_0 + D_1(I) h_j), \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned}
D_1(I) &= \int\limits_0^T \varphi(T-t) \sin(\sqrt{\lambda+2\mu}\,|\alpha|\,t) dt, \\
D_2(I) &= \int\limits_0^T \varphi(T-t) \sin(\sqrt{\mu}\,|\alpha|\,t) dt, \\
h_0(I) &= -\sin(\sqrt{\lambda+2\mu}|\alpha|T). \int\limits_{\Omega} (\alpha \cdot u_0^*). \cos(\alpha \cdot x) dx \\
&\quad + \sqrt{\lambda+2\mu}.|\alpha|. \int\limits_{\Omega} (\alpha \cdot u_T). \cos(\alpha \cdot x) dx \\
&\quad - \sqrt{\lambda+2\mu}.|\alpha|. \cos(\sqrt{\lambda+2\mu}|\alpha|T). \int\limits_{\Omega} (\alpha \cdot u_0). \cos(\alpha \cdot x) dx \\
&\quad - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \sin(\sqrt{\lambda+2\mu}|\alpha|(T-t))(\alpha \cdot X). \cos(\alpha \cdot x) d\omega dt, \\
h_j(I) &= -\sin(\sqrt{\mu}|\alpha|T). \int\limits_{\Omega} (|\alpha|^2 u_{0j}^* - \alpha_j(\alpha \cdot u_0^*)). \cos(\alpha \cdot x) dx \\
&\quad + \sqrt{\mu}.|\alpha|. \int\limits_{\Omega} (|\alpha|^2 u_{Tj} - \alpha_j(\alpha \cdot u_T)). \cos(\alpha \cdot x) dx \\
&\quad - \sqrt{\mu}.|\alpha|. \cos(\sqrt{\mu}|\alpha|T). \int\limits_{\Omega} (|\alpha|^2 u_{0j} - \alpha_j(\alpha \cdot u_0)). \cos(\alpha \cdot x) dx \\
&\quad - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \sin(\sqrt{\mu}|\alpha|(T-t))(|\alpha|^2 X_j - \alpha_j(\alpha \cdot X)). \cos(\alpha \cdot x) d\omega dt.
\end{aligned}$$

Từ Bổ đề trên, chúng ta thấy cần phải khảo sát hàm số

$$D(I)(\alpha) = \int_0^T \varphi(T-t)\sin(\sqrt{\lambda+2\mu}\,|\alpha|\,t)dt. \int_0^T \varphi(T-t)\sin(\sqrt{\mu}\,|\alpha|\,t)dt.$$

Có thể thấy bằng trực giác rằng bài toán của chúng ta không ổn định tại lân cận các không điểm của hàm này. Tuy nhiên, sử dụng ý tưởng từ Theorem 4 của [17] về tính chất của hàm giải tích, ta sẽ chỉ ra nếu $\varphi \not\equiv 0$ thì $D(I)$ khác 0 hầu hết trên R^2, hơn nữa tập hợp mà $D(I)$ "gần 0" là "khá nhỏ". Ta có kết quả sau.

Bổ đề 2.2. *Cho τ, q là các hằng số dương, $\varphi_0 \in L^1(0,T)\backslash\{0\}$ và $D(\varphi_0,\tau) : R^2 \to R$*

$$D(\varphi_0,\tau)(\alpha) = \int_0^T \varphi_0(t)\sin(\sqrt{\tau}|\alpha|t)dt.$$

Thì $D(\varphi_0,\tau) \neq 0$ với a.e $\alpha \in R^2$. Hơn nữa, nếu ta đặt

$$R_\varepsilon = \frac{q}{7eT}.\frac{\ln(\varepsilon^{-1})}{\ln(\ln(\varepsilon^{-1}))}, \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

thì độ đo Lebesgue của tập hợp

$$B(\varphi_0,\tau,\varepsilon) = \{\alpha \in B(0,R_\varepsilon), |D(\varphi_0,\tau)(\alpha)| \le \varepsilon^q\}$$

nhỏ hơn R_ε^{-1} với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Ở đây $B(0,R_\varepsilon)$ là quả cầu mở trong R^2 .

Từ Bổ đề 2.1 và Bổ đề 2.2 chúng ta có ngay kết quả sau đây về tính duy nhất nghiệm.

Định lý 2.1. *Cho $u, u^* \in (C^2([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)))^2$, $f, f^* \in (L^2(\Omega))^2$. Giả sử (u,f), (u^*,f^*) đều thỏa mãn hệ $(1)-(4)$ ứng với cùng một dữ liệu I với $\varphi \not\equiv 0$. Thì*

$$(u,f) = (u^*,f^*).$$

Bây giờ gọi (u_{ex}, f_{ex}) là nghiệm chính xác của hệ $(1)-(4)$ ứng với dữ liệu chính xác $I_{ex} = (\varphi_{ex}, X_{ex}, u_0^{ex}, u_0^{*ex}, u_T^{ex})$. Chúng ta sẽ luôn giả sử rằng

$$(u_{ex}, f_{ex}, \varphi_{ex}) \in \left(\left(C^2([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T];H^2(\Omega))\right)^2, (L^2(\Omega))^2, L^1(0,T)\backslash\{0\}\right) \quad (5)$$

Khi đó theo Bổ đề 2.1 thì với mỗi $j \in \{1,2\}$ ta có

$$F(\widetilde{f}_{jex})(\alpha) = 2\int_\Omega f_{jex}(x)\cos(\alpha\cdot x)dx = \frac{g_j(I_{ex})}{D(I_{ex})}$$

với a.e $\alpha \in R^2$. Ở đây g_j, D được định nghĩa như trong Bổ đề 2.1, $\widetilde{f}_{jex} : R^2 \to R$ xác định bởi $\widetilde{f}_{jex}(x) = \chi(\Omega)f_{jex}(x) + \chi(-\Omega)f_{jex}(-x)$, χ kí hiệu cho hàm đặc trưng của tập hợp, và F kí hiệu cho biến đổi Fourier trong R^2.

Cho dữ liệu xấp xỉ $I_\varepsilon = (\varphi, X, u_0, u_0^*, u_T)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &\|\varphi - \varphi_{ex}\|_{L^1(0,T)} \le \varepsilon, \left\|X_j - X_j^{ex}\right\|_{L^1(0,T,L^1(\partial\Omega))} \le \varepsilon, \left\|u_{0j} - u_{0j}^{ex}\right\|_{L^1(\Omega)} \le \varepsilon, \\ &\left\|u_{0j}^* - u_{0i}^{*ex}\right\|_{L^1(\Omega)} \le \varepsilon, \left\|u_{Tj} - u_{Tj}^{ex}\right\|_{L^1(\Omega)} \le \varepsilon, \quad \forall j \in \{1,2\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Chúng ta sẽ xây dựng một nghiệm chỉnh hóa $f_\varepsilon = (f_{1\varepsilon}, f_{2\varepsilon})$ có biến đổi Fourier là

$$F(f_{j\varepsilon})(\alpha) = \chi(B(0,R_\varepsilon)).\frac{g_j(I_\varepsilon).D(I_\varepsilon)}{\delta_\varepsilon + (D(I_\varepsilon))^2}$$

với $\alpha \in R^2$,trong đó các tham số được chọn như sau

$$q = \frac{1}{7}, \delta_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1+6q}{2}}, R_\varepsilon = \frac{q}{7eT}.\frac{ln(\varepsilon^{-1})}{ln(ln(\varepsilon^{-1}))}. \tag{7}$$

Chúng ta có

Định lý 2.2. *Cho (u_{ex}, f_{ex}) là nghiệm chính xác của hệ $(1)-(4)$ ứng với dữ liệu chính xác I_{ex} . Nếu (u_{ex}, f_{ex}) thỏa mãn (5) thì từ dữ liệu xấp xỉ I_ε thỏa mãn (6), chúng ta có thể xây dựng một nghiệm xấp xỉ $f_\varepsilon \in (C(\overline{\Omega}))^2$ sao cho với $j \in \{1,2\}$ thì*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_{j\varepsilon} - f_{jex}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Hơn nữa, nếu giả sử thêm rằng $f_{ex} \in (H^1(\Omega))^2$ thì với $j \in \{1,2\}$ ta có đánh giá sai số

$$\|f_{j\varepsilon} - f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)} \le 49eT\left(66\|f_{jex}\|^2_{H^1(\Omega)} + (2\pi)^{-2}\right).\frac{\ln(\ln(\varepsilon^{-1}))}{\ln(\varepsilon^{-1})}$$

với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ.

2.3. Chứng minh các kết quả

Chứng minh Bổ đề 2.1. Lấy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2$ và $G = \cos(\alpha \cdot x)$. Chú ý rằng với mỗi $j \in \{1,2\}$, phương trình thứ j của hệ (1) có thể viết lại

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau}{\partial x_k} + \varphi(t) f_j(x)$$

với $k = \{1,2\}\backslash j$. Lấy tích vô hướng (trong $L^2(\Omega)$) phương trình này với G và sử dụng điều kiện (2), ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^2}\int\limits_\Omega u_j G &= \int\limits_{\partial\Omega} (n_j\sigma_j + n_k\tau) G d\omega - \int\limits_\Omega \sigma_j \frac{\partial G}{\partial x_j} dx - \int\limits_\Omega \tau \frac{\partial G}{\partial x_k} dx + \varphi(t)\int\limits_\Omega f_j G dx \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} X_j G d\omega - \mu|\alpha|^2 \int\limits_\Omega u_j G dx - (\lambda+\mu)\alpha_j \int\limits_\Omega (\alpha\cdot u) G dx + \varphi(t)\int\limits_\Omega f_j G dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Nhân (8) với α_j, rồi lấy tổng theo $j = 1, 2$, ta nhận được

$$\frac{d}{dt^2}\int\limits_{\Omega}(\alpha\cdot u)Gdx = \int\limits_{\partial\Omega}(\alpha\cdot X)Gd\omega - (\lambda+2\mu)|\alpha|^2\int\limits_{\Omega}(\alpha\cdot u)Gdx + \varphi(t)\int\limits_{\Omega}(\alpha\cdot f)Gdx. \quad (9)$$

Nhân (8) với $|\alpha|^2$ và nhân (9) với $-\alpha_j$, rồi lấy tổng, ta được

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^2}\int\limits_{\Omega}\left(|\alpha|^2 u_j - \alpha_j.(\alpha\cdot u)\right)Gdx &= \int\limits_{\partial\Omega}\left(|\alpha|^2 X_j - \alpha_j.(\alpha\cdot X)\right)Gdx\\ -\mu\,|\alpha|^2\int\limits_{\Omega}\left(|\alpha|^2 u_j - \alpha_j.(\alpha\cdot u)\right)Gdx &+ \varphi(t)\int\limits_{\Omega}\left(|\alpha|^2 f_j - \alpha_j.(\alpha\cdot f)\right)Gdx.\end{aligned} \quad (10)$$

Bây giờ ta quan sát (9) và (10) như là các phương trình vi phân có dạng

$$y'' + \eta^2 y = h(t), \quad (11)$$

trong đó η là một hằng số thực và $y(0)$, $y'(0)$, $y(T)$ đã cho trước. Lấy tích vô hướng (trong $L^2(0,T)$) của (11) với $\sin(\eta(T-t))$, ta có

$$-y'(0)sin(\eta T) + \eta y(T) - \eta y(0)cos(\eta T) = \int\limits_0^T h(T-t)\sin(\eta t)dt. \quad (12)$$

Áp dụng (12) vào (9) với $\eta = \sqrt{(\lambda+2\mu)}|\alpha|$ và $y = \int\limits_{\Omega}(\alpha\cdot u).Gdx$, ta được

$$D_1(I).\int\limits_{\Omega}(\alpha\cdot f).Gdx = h_0(I), \quad (13)$$

trong đó $D_1(I), h_0(I)$ được xác định trong phát biểu theo Bổ đề 2.1.
Tương tự, áp dụng (12) vào (10) với $\eta = \sqrt{\mu}|\alpha|$ và $y = \int\limits_{\Omega}(|\alpha|^2 u_j - \alpha_j.(\alpha\cdot u)).Gdx$, với $j \in \{1,2\}$ ta được

$$D_2(I).\int\limits_{\Omega}(|\alpha|^2 f_j - \alpha_j(\alpha\cdot f)).Gdx = h_j(I), \quad (14)$$

trong đó $D_2(I), h_j(I)$ được xác định trong phát biểu theo Bổ đề 2.1.

Nhân (13) với $\alpha_j D_2(I)$ và nhân (14) với $D_1(I)$, rồi lấy tổng, ta thu được kết quả của Bổ đề 2.1.

Chứng minh Bổ đề 2.2. Đặt $\widetilde{\varphi}_0 : R \to R$

$$\widetilde{\varphi}_0(t) = \frac{1}{2}\begin{cases}\varphi_0(t) & t\in(0,T),\\ -\varphi_0(-t) & t\in(-T,0),\\ 0 & t\notin(-T,T).\end{cases}$$

và $\phi : C \to C$

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz}\widetilde{\varphi}_0(t)dt = \int_{-T}^{T} e^{-itz}\widetilde{\varphi}_0(t)dt.$$

Thì ϕ là một hàm nguyên (theo Định lý 1.9), hơn nữa $D(\varphi_0,\tau)(\alpha) = i\phi(\sqrt{\tau}|\alpha|)$. Vì $\widetilde{\varphi}_0 \not\equiv 0$ nên biến đổi Fourier (trên R) của nó cũng khác 0. Do đó, ϕ là một hàm nguyên không đồng nhất bằng 0. Suy ra tập hợp không điểm của nó là hữu hạn hoặc đếm được (theo Định lý 1.6), và nói riêng ta có $D(\varphi_0,\tau)(\alpha) \neq 0$ với a.e $\alpha \in R^2$.

Để đánh giá độ đo của $B(\varphi_0,\tau,\varepsilon)$, chúng ta sẽ dùng Định lý 1.7. Do ϕ là một hàm nguyên không đồng nhất bằng 0 nên tồn tại $z_0 \in (0,1)$ sao cho $|\phi(z_0)| = C_1 > 0$. Ta đặt $\phi_1 : C \to C$

$$\phi_1(z) = \frac{\phi(z+z_0)}{C_1}.$$

Thì ϕ_1 là một hàm nguyên, $\phi_1(0) = 1$, và với mỗi $z \in C, |z| \leq 2eR$,

$$C_1 |\phi_1(z)| = \left| \int_{-T}^{T} e^{-it(z+z_0)}\widetilde{\varphi}_0(t) \right| \leq e^{2eRT}.\int_{-T}^{T} |\widetilde{\varphi}_0(t)|\, dt = e^{2eRT}\, \|\varphi_0\|_{L^1(0,T)}$$

Với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, áp dụng Định lý 1.7 với $R = R_\varepsilon + 1$ và $\eta = \dfrac{\sqrt{\tau}}{8\pi R R_\varepsilon^2}$, ta có

$$\begin{aligned}\ln|\phi_1(z)| &> -\left[\ln((R_\varepsilon+1)R_\varepsilon^2) + \ln(\frac{120\pi e^3}{\sqrt{\tau}})\right].\left[2eT(R_\varepsilon+1) + \ln\left(\frac{\|\varphi_0\|_{L^1(0,T)}}{C_1}\right)\right] \\ &> -7eT.R_\varepsilon \ln R_\varepsilon - ln(C_1) > -q\ln(\varepsilon^{-1}) - \ln(C_1) = \ln(\frac{\varepsilon^q}{C_1}).\end{aligned}$$

với mọi $|z| \leq R_\varepsilon + 1$ ngoại trừ một tập hợp các đĩa $\{B(z_j,r_j)\}_{j\in J}$ có tổng các bán kính $\sum r_i \leq \eta R = \frac{\sqrt{\tau}}{8\pi R_\varepsilon^2}$.

Do đó, ta có $|\phi(z)| = C_1.|\phi_1(z-z_0)| \geq \varepsilon^q$ với mọi $|z| \leq R_\varepsilon$ ngoại trừ tập hợp $\bigcup\limits_{j\in J} B(z_j+z_0,r_j)$. Suy ra $B(\varphi_0,\tau,\varepsilon)$ chứa trong tập hợp $\bigcup\limits_{j\in J} B_j$, với

$$B_j = \{\alpha \in B(0,R_\varepsilon), \left|\sqrt{\tau}|\alpha| - y_j\right| \leq r_j\}$$

và $y_j = Re(z_j+z_0)$.

Nếu $y_j > \sqrt{\tau}R_\varepsilon + r_j$ thì $B_j = \emptyset$. Nếu $y_j \leq r_j$ thì $B_j \subset B(0,\frac{2r_j}{\sqrt{\tau}})$, nên $m(B_j) \leq \frac{4\pi r_j^2}{\tau}$. Nếu $r_j < y_j \leq \sqrt{\tau}R_\varepsilon + r_j$ thì

$$B_j \subset B\left(0,\frac{y_j+r_j}{\sqrt{\tau}}\right)\backslash B\left(0,\frac{y_j-r_j}{\sqrt{\tau}}\right)$$

nên

$$m(B_j) \leq \frac{\pi(y_j+r_j)^2}{\tau} - \frac{\pi(y_j-r_j)^2}{\tau} = \frac{4\pi y_j r_j}{\tau} \leq \frac{4\pi(\sqrt{\tau}R_\varepsilon + r_j)r_j}{\tau}.$$

Vậy ta có

$$m(B(\varphi,\tau,\varepsilon)) \le \sum \frac{4\pi(\sqrt{\tau}R_\varepsilon + r_j)r_j}{\tau} + \sum \frac{4\pi r_j^2}{\tau}$$
$$\le \frac{4\pi R_\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \sum r_j + \frac{8\pi}{\tau}(\sum r_j)^2$$
$$\le \frac{4\pi R_\varepsilon}{\sqrt{\tau}}.\frac{\sqrt{\tau}}{8\pi R_\varepsilon^2} + \frac{8\pi}{\tau}.(\frac{\sqrt{\tau}}{8\pi R_\varepsilon^2})^2 < \frac{1}{R_\varepsilon}$$

với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Bổ đề 2.2 được chứng minh xong.

Chứng minh Định lý 2.1. Đặt $w = u - u^*$ và $v = f - f^*$ thì (w, v) thỏa mãn hệ $(1) - (4)$ ứng với dữ liệu

$$I = (\varphi, (0,0), (0,0), (0,0), (0,0)).$$

Đặt $\widetilde{v}_j : R^2 \to R$ định nghĩa bởi $\widetilde{v}_j(x) = \chi(\Omega)v_j(x) + \chi(-\Omega)v_j(-x)$. Do Bổ đề 2.1, với mỗi $j \in \{1,2\}$ và $\alpha \in R^2\backslash\{0\}$, ta có

$$D(I).F(\widetilde{v}_j)(\alpha) = 2D(I).\int_\Omega v_j(x)\cos(\alpha\cdot x)dx = g_j(I) = 0.$$

Áp dụng Bổ đề 2.2 với $\varphi_0(t) = \varphi(T-t)$, ta được $D(I) \neq 0$ với a.e $\alpha \in R^2$. Do đó $F(\widetilde{v}_j) \equiv 0$, và nó kéo theo $\widetilde{v}_j \equiv 0$. Vậy $v \equiv (0,0)$. Suy ra w thỏa mãn

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu\Delta w + (\lambda+\mu)\nabla\left(div(w)\right). \tag{15}$$

Lấy tích vô hướng (trong $(L^2(\Omega))^2$) của (15) và $\partial w/\partial t$, ta được

$$\frac{1}{2}.\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = -\frac{\mu}{2}.\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{2}\|\nabla w_j\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda+\mu}{2}.\frac{d}{dt}\|div(w)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Tích phân đẳng thức này trên $(0,t)$, ta có

$$\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\sum_{j=1}^{2}\|\nabla w_j\|^2_{L^2(\Omega)} + (\lambda+\mu)\|div(w)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{16}$$

với mọi $t \in (0,T)$. Dùng điều kiện (2), ta có

$$\|div(w)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega \frac{\partial w_1}{\partial x_1}.\frac{\partial w_2}{\partial x_2}$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega \frac{\partial w_1}{\partial x_2}.\frac{\partial w_2}{\partial x_1}$$
$$\le \sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\left\|\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\|\nabla w_j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Do $\mu > 0$ và $\lambda + 2\mu > 0$, bất đẳng thức trên dẫn đến

$$\mu \sum_{j=1}^{2} \|\nabla w_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda + \mu) \|div(w)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Từ (16), chúng ta thu được $\partial w/\partial t = (0,0)$. Mà $w(x,0) = (0,0)$ nên điều này chứng tỏ $w \equiv (0,0)$. Định lý chứng minh xong.

Để chứng minh kết quả chỉnh hóa, chúng ta cần một số Bổ đề chuẩn bị.

Bổ đề 2.3. *Cho (u_{ex}, f_{ex}) là nghiệm chính xác của hệ $(1)-(4)$ ứng với dữ liệu chính xác I_{ex} thỏa mãn (5), và dữ liệu xấp xỉ I_ε thỏa mãn (6). Sử dụng các tham số định nghĩa ở (7), ta đặt*

$$G_j(I_\varepsilon) = \chi(B(0,R_\varepsilon)).\frac{g_j(I_\varepsilon)D(I_\varepsilon)}{\delta_\varepsilon + (D(I_\varepsilon))^2}.$$

Thì với mỗi $j \in \{1,2\}$ ta có $G_j(I_\varepsilon) \in L^1(R^2) \cap L^2(R^2)$, hơn nữa tồn tại một hằng số C_0 chỉ phụ thuộc I_{ex} sao cho với mọi $\varepsilon \in (0, e^{-e})$ ta có

$$\begin{aligned}
&\left|G_j(I_\varepsilon) - F(\widetilde{f}_{jex})\right| \\
&\leq \chi(B(0,R_\varepsilon))C_0 R_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1-6q}{2}} + 2\chi(B_\varepsilon)\|f_{jex}\|_{L^2(\Omega)} + \chi(R^2 \backslash B(0,R_\varepsilon))\left|F(\widetilde{f}_{jex})\right|,
\end{aligned}$$

trong đó $B_\varepsilon = \{\alpha \in B(0,R_\varepsilon), |D(I_{ex})(\alpha)| \leq \varepsilon^{2q}\}$.

Chứng minh. Đầu tiên, ta chỉ ra rằng tồn tại một hằng số $C_2 > 0$ chỉ phụ thuộc vào I_{ex} sao cho với mọi $\varepsilon \in (0, e^{-e})$, $r > r_0 = q/(9T)$, $j \in \{1,2\}$,

$$\begin{aligned}
\|D(I_{ex})\|_{L^\infty(R^2)} &\leq C_2, \\
\|D(I_\varepsilon) - D(I_{ex})\|_{L^\infty(R^2)} &\leq C_2\varepsilon \\
\|g_j(I_{ex})\|_{L^\infty(B(0,r))} &\leq C_2 r, \\
\|g_j(I_\varepsilon) - g_j(I_{ex})\|_{L^\infty(B(0,r))} &\leq C_2 r\varepsilon.
\end{aligned}$$

Nhắc lại là $D_1(I), D_2(I), h_0(I), h_j(I)$ được xác định theo Bổ đề 2.1. Ta có

$$\begin{aligned}
&|D_k(I_{ex})| \leq \|\varphi_{ex}\|_{L^1(0,T)}, \\
&|D_k(I_\varepsilon) - D_k(I_{ex})| \leq \|\varphi_\varepsilon - \varphi_{ex}\|_{L^1(0,T)} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

với mọi $\alpha \in R^2$ và $k \in \{1,2\}$. Suy ra $|D(I_{ex})| \leq \|\varphi_{ex}\|_{L^1(0,T)}^2$ và

$$\begin{aligned}
&|D(I_\varepsilon) - D(I_{ex})| \\
&= |D_1(I_\varepsilon) - D_1(I_{ex})|\,.\,|D_2(I_\varepsilon)| + |D_1(I_{ex})|\,.\,|D_2(I_\varepsilon) - D_2(I_{ex})| \\
&\leq \varepsilon.(\|\varphi_{ex}\|_{L^1(0,T)} + \varepsilon) + \|\varphi_{ex}\|_{L^1(0,T)}.\varepsilon \leq (2\|\varphi_{ex}\|_{L^1(0,T)} + e^{-e}).\varepsilon.
\end{aligned}$$

Bằng cách tính toán trực tiếp, ta có $\alpha \in B(0,r) \backslash \{0\}$ thì

$$\begin{aligned}
|\alpha_j h_0(I_{ex})| &\leq C_3 r|\alpha|^2, \\
|\alpha_j(h_0(I_\varepsilon) - h_0(I_{ex}))| &\leq C_3 r|\alpha|^2 \varepsilon, \\
|h_j(I_{ex})| &\leq C_3 r|\alpha|^2, \\
|h_j(I_\varepsilon) - h_j(I_{ex})| &\leq C_3 r|\alpha|^2 \varepsilon,
\end{aligned}$$

với mỗi $j \in \{1,2\}$, ở đây C_3 là một hằng số chỉ phụ thuộc vào I_{ex}. Do đó

$$|g_j(I_{ex})| \leq \frac{|\alpha_j h_0(I_{ex})|}{|\alpha|^2}. |D_2(I_{ex})| + \frac{|h_j(I_{ex})|}{|\alpha|^2}. |D_1(I_{ex})| \leq 2C_3 \|\varphi_{ex}\|_{L^1(0,T)} r$$

và

$$\begin{aligned}
&|g_j(I_\varepsilon) - g_j(I_{ex})| \\
&\leq \frac{|\alpha_j(h_0(I_\varepsilon) - h_0(I_{ex}))|}{|\alpha|^2}. |D_2(I_\varepsilon)| + \frac{|\alpha_j h_0(I_{ex})|}{|\alpha|^2}. |D_2(I_\varepsilon) - D_2(I_{ex})| \\
&\quad + \frac{|h_j(I_\varepsilon) - h_0(I_{ex})|}{|\alpha|^2}. |D_1(I_\varepsilon)| + \frac{|h_j(I_{ex})|}{|\alpha|^2}. |D_1(I_\varepsilon) - D_1(I_{ex})| \\
&\leq C_3 r\varepsilon. \left(\|\varphi_{ex}\|^2_{L^1(0,T)} + \varepsilon\right) + C_3 r.\varepsilon + C_3 r\varepsilon. \left(\|\varphi_{ex}\|^2_{L^1(0,T)} + \varepsilon\right) + C_3 r.\varepsilon \\
&\leq 2C_3 \left(\|\varphi_{ex}\|^2_{L^1(0,T)} + e^{-e} + 1\right) r\varepsilon.
\end{aligned}$$

Trở lại Bổ đề 2.3, với mỗi $j \in \{1,2\}$, ta có $G_j(I_\varepsilon) \in L^1(R^2) \cap L^2(R^2)$ bởi vì giá của $G_j(I_\varepsilon)$ chứa trong $\overline{B(0,R_\varepsilon)}$ và $G_j(I_\varepsilon) \in L^\infty(R^2)$. Hơn nữa

$$\begin{aligned}
&\left|G_j(I_\varepsilon) - F(\widetilde{f}_{jex})\right| \\
&\leq \chi(B(0,R_\varepsilon)) \left| \frac{g_j(I_\varepsilon) D(I_\varepsilon)}{\delta_\varepsilon + (D(I_\varepsilon))^2} - \frac{g_j(I_{ex}) D(I_{ex})}{\delta_\varepsilon + (D(I_{ex}))^2} \right| \\
&\quad + \chi(B(0,R_\varepsilon)) \left| \frac{g_j(I_{ex}) D(I_{ex})}{\delta_\varepsilon + (D(I_{ex}))^2} - \frac{g_j(I_{ex})}{D(I_{ex})} \right| \\
&\quad + \chi(R^2 \backslash B(0,R_\varepsilon)). \left|F(\widetilde{f}_{jex})\right|.
\end{aligned}$$

Chúng ta sẽ đánh giá từng số hạng ở vế phải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{g_j(I_\varepsilon) D(I_\varepsilon)}{\delta_\varepsilon + (D(I_\varepsilon))^2} - \frac{g_j(I_{ex}) D(I_{ex})}{\delta_\varepsilon + (D(I_{ex}))^2} \right| \\
&\leq \frac{\delta_\varepsilon |g_j(I_\varepsilon) D(I_\varepsilon) - g_j(I_{ex}) D(I_{ex})|}{\left(\delta_\varepsilon + (D(I_\varepsilon))^2\right)\left(\delta_\varepsilon + (D(I_{ex}))^2\right)} \\
&\quad + \frac{|D(I_\varepsilon)| . |D(I_{ex})| . |g_j(I_\varepsilon) D(I_{ex}) - g_j(I_{ex}) D(I_\varepsilon)|}{\left(\delta_\varepsilon + (D(I_\varepsilon))^2\right)\left(\delta_\varepsilon + (D(I_{ex}))^2\right)} \\
&\leq \frac{|g_j(I_\varepsilon) D(I_\varepsilon) - g_j(I_{ex}) D(I_{ex})|}{\delta_\varepsilon} + \frac{|g_j(I_\varepsilon) D(I_{ex}) - g_j(I_{ex}) D(I_\varepsilon)|}{\delta_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Nếu $\varepsilon \in (0, e^{-e})$ thì $R_\varepsilon > r_0$, do đó với mọi $\alpha \in B(0,R_\varepsilon)$ ta có

$$\begin{aligned}
&|g_j(I_\varepsilon) D(I_\varepsilon) - g_j(I_{ex}) D(I_{ex})| \\
&\leq |g_j(I_\varepsilon) - g_j(I_{ex})| . |D(I_\varepsilon)| + |g_j(I_{ex})| . |D(I_\varepsilon) - D(I_{ex})| \\
&\leq C_2 R_\varepsilon \varepsilon.(C_2 + \varepsilon) + C_2 R_\varepsilon \varepsilon \\
&\leq (C_2 + 1)^2 R_\varepsilon \varepsilon,
\end{aligned}$$

và tương tự
$$|g_j(I_\varepsilon)D(I_{ex}) - g_j(I_{ex})D(I_\varepsilon)| \le (C_2+1)^2 R_\varepsilon \varepsilon.$$
Do đó với mọi $\varepsilon \in (0, e^{-e})$ ta có thể đánh giá số hạng đầu tiên
$$\chi(B(0,R_\varepsilon))\left|\frac{g_j\left(I_\varepsilon\right)D(I_\varepsilon)}{\delta_\varepsilon + \left(D(I_\varepsilon)\right)^2} - \frac{g_j\left(I_{ex}\right)D(I_{ex})}{\delta_\varepsilon + \left(D(I_{ex})\right)^2}\right| \le \chi(B(0,R_\varepsilon)).\frac{2(C_2+1)^2 R_\varepsilon \varepsilon}{\delta_\varepsilon}.$$
Xét số hạng thứ hai, ta có
$$\left|\frac{g_j\left(I_{ex}\right)D(I_{ex})}{\delta_\varepsilon + \left(D(I_{ex})\right)^2} - \frac{g_j\left(I_{ex}\right)}{D(I_{ex})}\right| = \frac{\delta_\varepsilon \left|g_j\left(I_{ex}\right)\right|}{\left(\delta_\varepsilon + \left(D(I_{ex})\right)^2\right).\left|D(I_{ex})\right|}.$$
Với mọi $\alpha \in R^2$ ta luôn có
$$\frac{\delta_\varepsilon \left|g_j\left(I_{ex}\right)\right|}{\left(\delta_\varepsilon + \left(D(I_{ex})\right)^2\right).\left|D(I_{ex})\right|} \le \left|\frac{g_j\left(I_{ex}\right)}{D(I_{ex})}\right| = 2\left|\int\limits_\Omega f_{jex}(x)\cos(\alpha\cdot x)dx\right| \le 2\left\|f_{jex}\right\|_{L^2(\Omega)}.$$
Hơn nữa, trong trường hợp $\alpha \in B(0,R_\varepsilon)\backslash B_\varepsilon$ thì
$$\frac{\delta_\varepsilon \left|g_j\left(I_{ex}\right)\right|}{\left(\delta_\varepsilon + \left(D(I_{ex})\right)^2\right).\left|D(I_{ex})\right|} \le \frac{\delta_\varepsilon \left|g_j\left(I_{ex}\right)\right|}{\left|D(I_{ex})\right|^3} \le \frac{\delta_\varepsilon C_2 R_\varepsilon}{\varepsilon^{6q}}.$$
Do đó với mọi $\varepsilon \in (0, e^{-e})$ ta có thể đánh giá số hạng thứ hai
$$\chi(B(0,R_\varepsilon))\left|\frac{g_j\left(I_{ex}\right)D(I_{ex})}{\delta_\varepsilon + \left(D(I_{ex})\right)^2} - \frac{g_j\left(I_{ex}\right)}{D(I_{ex})}\right| \le 2\chi(B_\varepsilon)\left\|f_{jex}\right\|_{L^2(\Omega)} + \chi(B(0,R_\varepsilon))\frac{\delta_\varepsilon C_2 R_\varepsilon}{\varepsilon^{6q}}.$$
Tóm lại với mọi $\varepsilon \in (0, e^{-e})$, we have
$$\begin{aligned}\left|G_j(I_\varepsilon) - F(\widetilde{f}_{jex})\right| \le \chi(B(0,R_\varepsilon))\left(\frac{2(C_2+1)^2 R_\varepsilon \varepsilon}{\delta_\varepsilon} + \frac{\delta_\varepsilon C_2 R_\varepsilon}{\varepsilon^{6q}}\right) +& \\ +2\chi(B_\varepsilon)\left\|f_{jex}\right\|_{L^2(\Omega)} + \chi(R^2\backslash B(0,R_\varepsilon))\left|F(\widetilde{f}_{jex})\right|&.\end{aligned}$$
Chọn $\delta_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{6q+1}{2}}$ và $C_0 = 2(C_2+1)^2 + C_2$, ta hoàn tất chứng minh Bổ đề 2.3.

Rõ ràng là với mỗi $j \in \{1,2\}$ thì do Định lý hội tụ bị chặn Lebesgue ta có $\chi(R^2\backslash B(0,R_\varepsilon))\left|F(\widetilde{f}_{jex})\right|$ hội tụ về 0 trong $L^2(R^2)$ khi $\varepsilon \to 0$. Tuy nhiên, để đưa ra một đánh giá tường minh thì cần phải có thêm một số thông tin tiên nghiệm về f_{ex}.

Sử dụng Định lý 1.10, ta sẽ chứng minh kết quả sau đây.

Bổ đề 2.4. *Cho $w \in H^1(\Omega)$ và $r > \pi/(2\sqrt{2})$. Thì*
$$\int\limits_{R^2\backslash B(0,r)}\left|\int\limits_\Omega w(x)\cos(\alpha\cdot x)dx\right|^2 d\alpha \le \frac{72\sqrt{2}\pi}{r}\left\|w\right\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Chứng minh. Vì

$$\int\limits_{R^2\setminus B(0,r)} \left|\int\limits_{\Omega} w(x)\cos(\alpha\cdot x)dx\right|^2 d\alpha \le \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{|\alpha_j|\ge r/\sqrt{2}} \left|\int\limits_{\Omega} w(x)\cos(\alpha\cdot x)dx\right|^2 d\alpha$$

nên chứng minh sẽ được hoàn tất một khi ta chỉ ra với mỗi $j\in\{1,2\}$ thì

$$\int\limits_{|\alpha_j|\ge r/\sqrt{2}} \left|\int\limits_{\Omega} w(x)\cos(\alpha\cdot x)dx\right|^2 d\alpha \le \frac{24\sqrt{2}\pi}{r}\left(\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left\|\frac{\partial w}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Ta sẽ chứng minh cho trường hợp $j=1$, và trường hợp còn lại tương tự. Ta có

$$\int\limits_{\Omega} w(x)\cos(\alpha\cdot x)dx = \int\limits_0^1 \left[w(x)\frac{\sin(\alpha\cdot x)}{\alpha_1}\right]_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 - \int\limits_{\Omega}\frac{\partial w}{\partial x_1}.\frac{\sin(\alpha\cdot x)}{\alpha_1}dx$$

nên

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{\Omega} w(x)\cos(\alpha\cdot x)dx\right|^2\\
&\le \frac{3}{\alpha_1^2}\left|\int\limits_0^1 w(1,x_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2x_2)dx_2\right|^2 + \\
&\quad + \frac{3}{\alpha_1^2}\left|\int\limits_0^1 w(0,x_2)\sin(\alpha_2x_2)dx_2\right|^2 + \frac{3}{\alpha_1^2}\left|\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w}{\partial x_1}.\sin(\alpha\cdot x)dx\right|^2.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|\alpha_1|\ge r/\sqrt{2}} \left|\int\limits_{\Omega} w(x)\cos(\alpha\cdot x)dx\right|^2 d\alpha\\
&\le \frac{6}{r^2}\int\limits_{R^2}\left|\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w}{\partial x_1}(x).\sin(\alpha\cdot x)dx\right|^2 d\alpha\\
&\quad + \int\limits_{|\alpha_1|\ge r/\sqrt{2}}\frac{3}{\alpha_1^2}d\alpha_1.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 w(1,x_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2x_2)dx_2\right|^2 d\alpha_2\\
&\quad + \int\limits_{|\alpha_1|\ge r/\sqrt{2}}\frac{3}{\alpha_1^2}d\alpha_1.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 w(0,x_2)\sin(\alpha_2x_2)dx_2\right|^2 d\alpha_2\\
&= \frac{12\pi^2}{r^2}\left\|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{6\sqrt{2}\pi}{r}\|w(1,.)\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{6\sqrt{2}\pi}{r}\|w(0,.)\|^2_{L^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$w(1,x_2)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 w(x)\right)dx_1=\int_0^1\left(w(x)+x_1\frac{\partial w}{\partial x_1}(x)\right)dx_1,$$

ta thu được

$$|w(1,x_2)|^2\le\int_0^1\left(2\,|w(x)|^2+2\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}(x)\right|^2\right)dx_1.$$

Vậy

$$\int_0^1 |w(1,x_2)|^2\,dx_2\le 2\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+2\left\|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Tương tự

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |w(0,x_2)|^2\,dx_2\\
&=\int_0^1\left|\int_0^1\frac{\partial}{\partial x_1}\left((1-x_1)w(x)\right)dx_1\right|^2dx_2\\
&\le\int_0^1\int_0^1\left(2\,|w(x)|^2+2\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}(x)\right|^2\right)dx_1dx_2\\
&=2\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+2\left\|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{|\alpha_1|\ge r/\sqrt{2}}\left|\int_\Omega w(x)\cos(\alpha\cdot x)dx\right|^2 d\alpha\\
&\le\frac{12\pi^2}{r^2}\left\|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}+\frac{24\sqrt{2}\pi}{r}\left(\|w(1,.)\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\le\frac{24\sqrt{2}\pi}{r}\left(\|w\|^2_{L^2(\Omega)}+2\left\|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Bổ đề 2.4 chứng minh xong.

Ghi chú 1. *Bằng cách tương tự, chúng ta chứng minh được rằng nếu* $w\in H^1(\Omega)$ *và* $r>\pi/(2\sqrt{2})$ *thì*

$$\int_{R^2\setminus B(0,r)}\left|\int_Q w(x_1,x_2)\cos(\alpha_1x_1)\cos(\alpha_2x_2)dx\right|^2d\alpha\le\frac{16\sqrt{2}\pi}{r}\,\|w\|^2_{H^1(Q)}.$$

Đánh giá này cải thiện trực tiếp các kết quả trong [16].

Chứng minh Định lý 2.2. Nhắc lại rằng các tham số $q, \delta_\varepsilon, R_\varepsilon$ được xác định trong (7), và $G_j(I_\varepsilon)$, B_ε được xác định trong Bổ đề 2.3. Với mỗi $j \in \{1, 2\}$ ta định nghĩa $f_{j\varepsilon} : R^2 \to R$

$$f_{j\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{R^2} G_j(I_\varepsilon)(\alpha) e^{i(\xi \cdot \alpha)} d\alpha.$$

Áp dụng Bổ đề 2.3 ta có $G_j(I_\varepsilon) \in L^1(R^2) \cap L^2(R^2)$, nên $f_{j\varepsilon} \in C(R^2) \cap L^2(R^2)$ and $F(f_{j\varepsilon}) = G_j(I_\varepsilon)$. Lại áp dụng Bổ đề 2.3, Ta có với mọi $\varepsilon \in (0, e^{-e})$ thì

$$\begin{aligned} &\left| F(f_{j\varepsilon}) - F(\widetilde{f}_{jex}) \right| \\ &\le \chi(B(0, R_\varepsilon)) C_0 R_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1-6q}{2}} + 2\chi(B_\varepsilon) \|f_{jex}\|_{L^2(\Omega)} + \chi(R^2 \backslash B(0, R_\varepsilon)) \left| F(\widetilde{f}_{jex}) \right|, \end{aligned} \tag{17}$$

trong đó C_0 là một hằng số dương chỉ phụ thuộc I_{ex}. Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} &\left| F(f_{j\varepsilon}) - F(\widetilde{f}_{jex}) \right|^2 \\ &\le 2\chi(B(0, R_\varepsilon)) C_0^2 R_\varepsilon^2 \varepsilon^{1-6q} + 4\chi(B_\varepsilon) \|f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\chi(R^2 \backslash B(0, R_\varepsilon)) \left| F(\widetilde{f}_{jex}) \right|^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} &\left\| F(f_{j\varepsilon}) - F(\widetilde{f}_{jex}) \right\|^2_{L^2(R^2)} \\ &\le 2C_0^2 \pi R_\varepsilon^4 \varepsilon^{1-6q} + 4m(B_\varepsilon) \|f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2 \int\limits_{R^2 \backslash B(0, R_\varepsilon)} \left| F(\widetilde{f}_{jex}) \right|^2 d\alpha. \end{aligned}$$

Với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$2C_0^2 \pi R_\varepsilon^4 \varepsilon^{1-6q} \le R_\varepsilon^{-1}.$$

Ngoài ra, vì

$$B_\varepsilon \subset (\{\alpha \in B(0, R_\varepsilon), |D_1(I_{ex})(\alpha)| \le \varepsilon^q\} \cup \{\alpha \in B(0, R_\varepsilon), |D_2(I_{ex})(\alpha)| \le \varepsilon^q\}),$$

ta áp dụng Bổ đề 2.2 (với $\varphi_0(t) = \varphi_{ex}(T - t)$) suy ra

$$m(B_\varepsilon) \le 2R_\varepsilon^{-1}.$$

Vậy với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ thì ta có

$$\left\| F(f_{j\varepsilon}) - F(\widetilde{f}_{jex}) \right\|^2_{L^2(R^2)} \le \frac{1}{R_\varepsilon} + \frac{8}{R_\varepsilon} \|f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2 \int\limits_{R^2 \backslash B(0, R_\varepsilon)} \left| F(\widetilde{f}_{jex}) \right|^2 d\alpha d\beta.$$

Mặt khác, áp dụng đẳng thức Parseval ta được

$$\|f_{j\varepsilon} - f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \left\| f_{j\varepsilon} - \widetilde{f}_{jex} \right\|^2_{L^2(R^2)} = \frac{1}{4\pi^2} \left\| F(f_{j\varepsilon}) - F(\widetilde{f}_{jex}) \right\|^2_{L^2(R^2)}.$$

Vậy với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ thì

$$\|f_{j\varepsilon} - f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{R_\varepsilon} + \frac{8}{R_\varepsilon}\|f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int\limits_{R^2\setminus B(0,R_\varepsilon)} \left|F(\widetilde{f}_{jex})\right|^2 d\alpha\right). \qquad (18)$$

Vì $F(\widetilde{f}_{jex}) \in L^2(R^2)$ nên từ (18) ta có ngay

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f_{j\varepsilon} - f_{jex}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Bây giờ xét khi $f_{jex} \in H^1(\Omega)$. Sử dụng (18) và Bổ đề 2.4, ta có

$$\begin{aligned}
&\|f_{j\varepsilon} - f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{R_\varepsilon} + \frac{8}{R_\varepsilon}\|f_{jex}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2.4.\frac{72\sqrt{2}\pi}{R_\varepsilon}\|f_{jex}\|^2_{H^1(\Omega)}\right)\\
&\le \left(66\|f_{jex}\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{4\pi^2}\right).\frac{1}{R_\varepsilon}\\
&= 49eT\left(66\|f_{jex}\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{4\pi^2}\right).\frac{\ln(\ln(\varepsilon^{-1}))}{\ln(\varepsilon^{-1})}.
\end{aligned}$$

với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Định lý chứng minh xong.

Ghi chú 2. *Chúng ta cũng có thể thay R_ε định nghĩa trong (7) bởi*

$$\widetilde{R}_\varepsilon = 10\left(\ln(\varepsilon^{-1})\right)^{9/10}$$

để xây dựng một lời giải chỉnh hóa tốt hơn trong trường hợp ε không quá nhỏ.

Chương 3

VÍ DỤ MINH HỌA

Ta xét một ví dụ cụ thể minh họa cho các tính toán lý thuyết ở Chương 2.

Xét khi $T = 1$, $\mu = 1/12$, $\lambda = -1/8$.

Xét dữ liệu chính xác $I_{ex} = (\varphi, X, u_0, u_0^*, u_T)$ cho bởi

$$\begin{aligned}
&\varphi = \frac{\pi^2}{3}\sin(\pi t),\\
&X_1 = \frac{\pi}{6}\sin(\pi t).\left[\sin(2\pi x_2)n_1 + \sin(4\pi x_1)n_2\right],\\
&X_2 = \frac{\pi}{6}\sin(\pi t).\left[\sin(2\pi x_1)n_2 + \sin\left(4\pi x_2\right)n_1\right],\\
&u_0 = u_T = (0,0),\\
&u_0^* = \left(\pi\sin(4\pi x_1)\sin(2\pi x_2), \pi\sin(2\pi x_1)\sin(4\pi x_2)\right).
\end{aligned}$$

Thì lời giải chính xác tương ứng của hệ $(1)-(4)$ là

$$\begin{aligned}
&u_{ex} = \left(\sin(\pi t)\sin(4\pi x_1)\sin(2\pi x_2), \sin(\pi t)\sin(4\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\right),\\
&f_{ex} = \left(\cos(2\pi x_1)\cos(4\pi x_2), \cos(4\pi x_1)\cos(2\pi x_2)\right).
\end{aligned}$$

Với mỗi $n = 1, 2, 3, ...$, ta xét dữ liệu bị nhiễu $I_n = (\varphi_n, X^n, u_0^n, u_0^{*n}, u_T^n)$ cho bởi

$$\begin{aligned}
&\varphi_n = \varphi,\\
&X_1^n = X_1 + \frac{\pi}{12\sqrt{n}}\sin(\pi t).\left[\sin(2n\pi x_2)n_1 + 2\sin(2n\pi x_1)n_2\right],\\
&X_2^n = X_2 + \frac{\pi}{12\sqrt{n}}\sin(\pi t).\left[\sin(2n\pi x_1)n_2 + 2\sin(2n\pi x_2)n_1\right],\\
&u_0^n = u_T^n = (0,0),\\
&u_0^{*n} = u_0^* + \frac{\pi}{n\sqrt{n}}\sin(2n\pi x_1)\sin(2n\pi x_2)\,(1,1).
\end{aligned}$$

Thì lời giải bị nhiễu tương ứng của hệ $(1)-(4)$ là

$$\begin{aligned}
&u^n = u_{ex} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\sin(\pi t)\sin(2n\pi x_1)\sin(2n\pi x_2)\,(1,1),\\
&f_{di}^n = f_{ex} + \left[\left(\frac{3}{2}\sqrt{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}}\right)\sin(2n\pi x_1)\sin(2n\pi x_2) + \frac{\sqrt{n}}{2}\cos(2n\pi x_1)\cos(2n\pi x_2)\right](1,1).
\end{aligned}$$

Ta thấy

$$\varphi_n = \varphi,$$
$$\left\| X_j^n(t,.) - X_j^{ex}(t,.) \right\|_{L^1(0,T,\partial\Omega)} = \frac{2}{\pi\sqrt{n}},$$
$$u_0^n = u_0, u_T^n = u_T,$$
$$\left\| u_{0j}^{*n} - u_{0j}^{*} \right\|_{L^1(\Omega)} = \frac{4}{\pi n\sqrt{n}}, \forall j \in \{1,2\},$$

nghĩa là khi n lớn thì dữ liệu bị nhiễu I_n xấp xỉ dữ liệu chính xác I_{ex} theo nghĩa ở (6).

Tuy nhiên, ta lại có với mỗi $j \in \{1,2\}$ thì

$$\left\| \widetilde{f}_{jdi}^n - f_{jex} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{5}{8}n - \frac{9}{4n} + \frac{9}{4n^3},$$

nghĩa là khi n lớn thì lời giải bị nhiễu có sai số lớn so với lời giải chính xác.

Như vậy, khi n lớn thì một sai số nhỏ của dữ liệu sẽ gây ra một sai số lớn của lời giải. Điều này chứng tỏ đây là bài toán không chỉnh. Do đó một sự chỉnh hóa là cần thiết.

Ta sẽ xây dựng lời giải chỉnh hóa như ở Chương 2, trong đó ta có sự tương ứng $\varepsilon = n^{-1/2}$. Tính toán cụ thể, ta có

$$D(I_n)(\alpha) = \frac{32\pi^6 \sin\left(\frac{|\alpha|}{2\sqrt{6}}\right)\sin\left(\frac{|\alpha|}{2\sqrt{3}}\right)}{\left(|\alpha|^2 - 24\pi^2\right).\left(|\alpha|^2 - 12\pi^2\right)},$$
$$g_1(I_n)(\alpha) = D(I_n)(\alpha) \times (\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2) - (1-\cos(\alpha_1))(1-\cos(\alpha_2)))\times$$
$$\times\left(\frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1^2 - 4\pi^2)(\alpha_2^2 - 16\pi^2)} + \frac{\sqrt{n}(\alpha_1\alpha_2 + 12\pi^2(2-n^2))}{(\alpha_1^2 - 4n^2\pi^2)(\alpha_2^2 - 4n^2\pi^2)}\right),$$

và lời giải chỉnh hóa được cho bởi công thức

$$f_{1re}^n(x) = \int\limits_{B(0,\widetilde{R}_n)} \frac{g_1(I_n)(\alpha).D(I_n)(\alpha)}{\delta_n + (D(I_n)(\alpha))^2}.\cos(\alpha\cdot x)d\alpha,$$

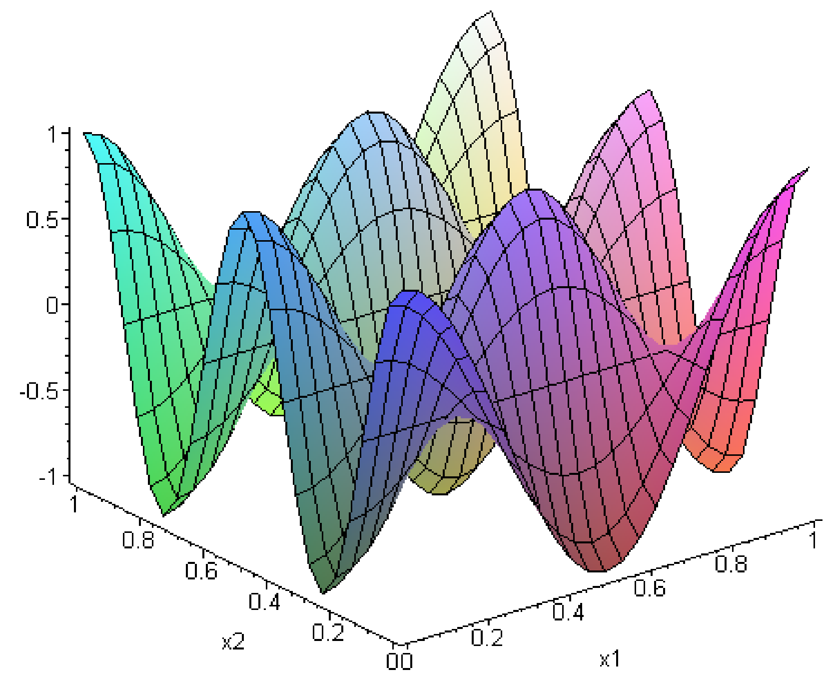
trong đó

$$\delta_n = n^{-13/28}, \widetilde{R}_n = 10\left(\ln(\sqrt{n})\right)^{9/10}.$$

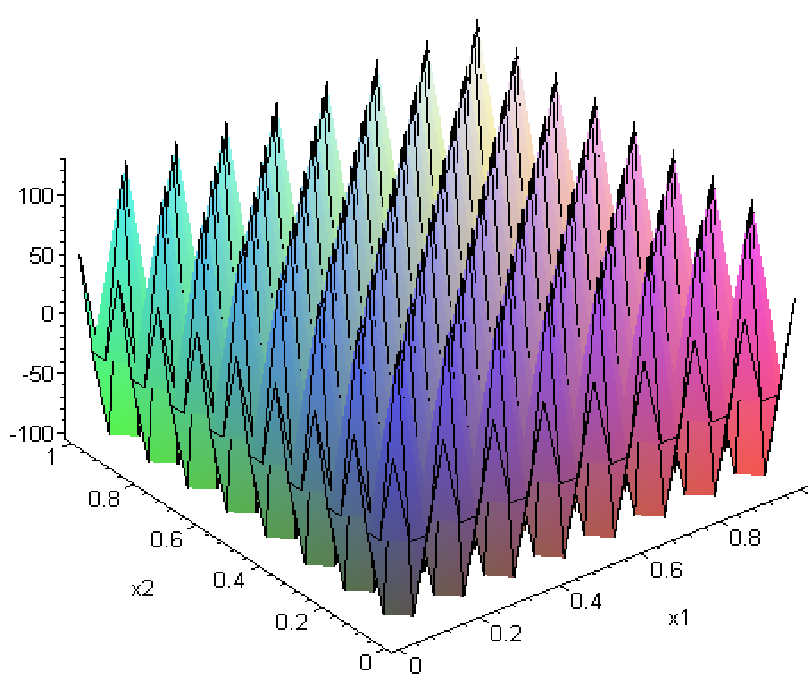
Chẳng hạn, tương ứng với $\varepsilon = 10^{-2}$, ta có

$$n = 10^4, \delta_n = 0.01389495494, \widetilde{R}_n = 39.52948133.$$

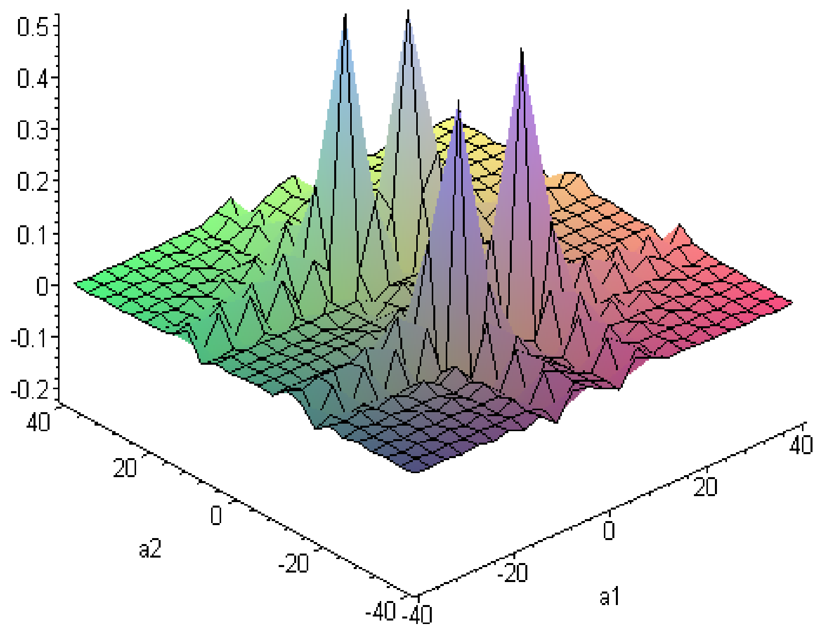
Ta có các hình vẽ dưới đây về lời giải chính xác f_{1ex} , lời giải bị nhiễu f_{1di}^n và lời giải chỉnh hóa f_{1re}^n. Có thể thấy các kết quả này rất phù hợp với các tính toán lý thuyết ở Chương 2.



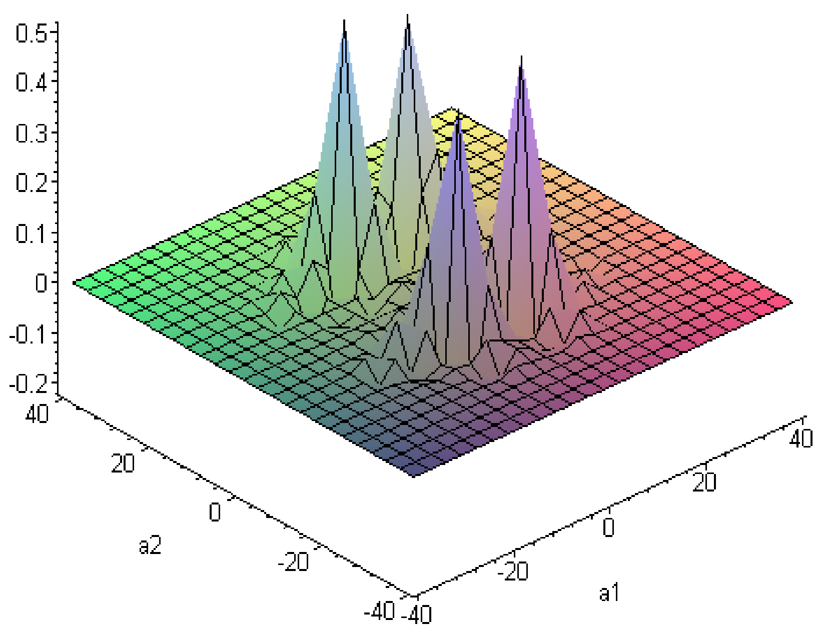
Hình 1. Lời giải chính xác.



Hình 2. Lời giải bị nhiễu.



Hình 3. Biến đổi Fourier của lời giải chính xác.



Hình 4. Biến đổi Fourier của lời giải chỉnh hóa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S.Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, New York, Mc Graw−Hill (1970).

[2] Martin H. Sadd, *Elasticity Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier (2005).

[3] B.Ya.Levin, *Lectures on Entire Functions*, Trans Math Monographs, Vol.150, AMS, Providence, Rhole Island (1996).

[4] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw−Hill (1987).

[5] R. Adam, *Sobolev space*, Acad. Press (1975).

[6] H. Brezis, *Giải tích hàm − Lý thuyết và Ứng dụng*, Người dịch: Nguyễn Hội Nghĩa và Nguyễn Thành Long, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh (2002).

[7] Dương Minh Đức, *Giải tích hàm*, Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Tp Hồ Chí Minh (2000).

[8] T.Cazenave, A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equation*, Clarendon Press Oxford (1998).

[9] Dang Dinh Ang, Rudolf Gorenflo, Vy Khoi Le, Dang Duc Trong, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat equation*, Springer (2002).

[10] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer (1996).

[11] V.Isakov, *Inverse source problems*, Math. surveys and monographs series, Vol.34, AMS, Providence, Rhode Island (1990).

[12] A. N. Tikhonov, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Math. Sborn.42 (1935), 199−216.

[13] M. Choulli and M. Yamamoto, *Conditional stability in determining a heat source*, J. Inv. Ill−Posed Problems 12 (3) (2004), 233−243.

[14] M. Yamamoto, *Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle*, Mathematical and Computer Modelling 18 (1993), 79−88.

[15] Dang Duc Trong, Nguyen Thanh Long, Pham Ngoc Dinh Alain, *Nonhomogeneous heat equation: Identification and regularization for the inhomogeneous term*, J. Math. Anal. Appl. 312 (2005), 93−104.

[16] Dang Duc Trong, Pham Hoang Quan, Pham Ngoc Dinh Alain, *Determination of a two-dimentional heat source: Uniqueness, regularization and error estimate*, J. Comp. Appl. Math. 191 (2006), 50−67.

[17] Dang Duc Trong and Truong Trung Tuyen, *Error of Tikhonov's regularization for intergral convolution equations*, arXiv:Math.NA/0610046 v1 1 Oct 2006.

[18] M. Grasselli, M. Ikehata, M. Yamamoto, *An inverse source problem for the Lamé system with variable coefficients*, Applicable Analysis. 84 (4) (2005), 357—375.

[19] Dang Duc Trong, Pham Ngoc Dinh Alain, Phan Thanh Nam and Truong Trung Tuyen, *Determination of the body force of a two-dimensional isotropic elastic body*, arXiv:0705.2107v1 [math.AP] 15 May 2007.